EQUILÍBRIOS MÚLTIPLOS E TRAGÉDIAS DOS COMUNS: UMA ABORDAGEM DE JOGOS EVOLUCIONÁRIOS

Carlos Eduardo Iwai Drumond (UESC)

Resumo: A tragédia dos comuns, originalmente prevista por Hardin (1968), diz respeito à uma situação na qual os agentes, buscando maximizar sua satisfação individual, acabam por esgotar os recursos naturais ou outros recursos de uso comum. Neste trabalho o uso dos recursos naturais é modelado de maneira alternativa, a partir de um jogo evolucionário. Neste jogo tanto a solução clássica da tragédia dos comuns quanto à gestão coletiva sustentável pode emergir da interação entre os agentes, o que implica num jogo com equilíbrios múltiplos.

Palavras Chave: Tragédia dos Comuns, Dinâmica Evolucionária, Equilíbrios Múltiplos

Abstract: As predicted by Hardin (1968), the tragedy of the commons refers to a situation in which the agents, in search of to maximize their individual satisfaction, tend to deplete the natural resources. In this paper, the use of natural resources is modeled alternatively, from an evolutionary game. In this game both the classical solution of the tragedy of the commons as sustainable collective management can emerge from the interaction between the agents, resulting in a multiple equilibria solution.

Keywords: Tragedy of the Commons, Evolutionary Dynamics, Multiple Equilibria

JEL: C73, D02, Q00

Introdução

A tragédia dos comuns, originalmente prevista por Hardin (1968), diz respeito à uma situação na qual os agentes, buscando maximizar sua satisfação individual, acabam por esgotar os recursos naturais ou outros recursos de uso comum. Tal situação é facilmente transcrita como um jogo do tipo dilema dos prisioneiros no qual a solução de mercado é sub-ótima. Sendo assim, restaria internalizar as externalidades geradoras da tragédia dos comuns como forma de mitigar o problema do uso não sustentável dos recursos naturais. As duas maneiras usuais de se fazer isso seria através da regulação governamental do uso do recurso natural comum ou através da privatização do mesmo.

A partir dos trabalhos de Ostrom (1990), diferentes formas de solução da tragédia dos comuns aparecem como possíveis, condicionadas ao ambiente institucional das comunidades que utilizam os recursos naturais. Ostrom (1990), após uma longa pesquisa empírica, aponta uma série de condições para que os recursos naturais possam ser geridos de maneira coletiva sem a intervenção estatal ou a completa privatização, todas elas ligadas à capacidade de se gerar *enforcement* coletivo que conduzisse ao uso sustentável do recurso natural por parte dos indivíduos.

Neste trabalho, em particular, procura-se tratar o problema da tragédia dos comuns através de um jogo evolucionário dinâmico que, em alguma medida consiga traduzir formalmente soluções não usuais para o problema da gestão dos recursos naturais.

Desde os trabalhos de Neumann e Morgenstern (1944) e, sobretudo, do trabalho de Nash (1950), que a teoria dos jogos foi sendo introduzida no vocabulário dos economistas ao ponto de contemporaneamente ter se tornado uma ferramenta padrão em teoria econômica.

Até os anos oitenta, em economia, a teoria dos jogos-não-cooperativos se ocupava basicamente de situações nas quais todos os agentes envolvidos no jogo não só possuem racionalidade plena como existe conhecimento comum da racionalidade de todos os agentes no jogo. A partir da década de noventa, ganhou espaço no campo da teoria dos jogos a teoria dos jogos evolucionários, ocupada justamente de incorporar comportamentos de racionalidade limitada nos modelos.

Os primeiros desenvolvimentos da teoria dos jogos evolucionários remetem aos trabalhos de Maynard Smith e Price (1973) e Maynard Smith (1982). Estes autores adaptaram a teoria dos jogos tradicional para o contexto da biologia, se ocupando de problemas de seleção natural e conflito entre espécies.

A teoria dos jogos evolucionários estuda o comportamento de grandes populações de agentes envolvidos em repetidas interações nas quais as ações de um grupo de agentes dependem também das escolhas dos outros grupos de agentes. Na teoria dos jogos evolucionários, contudo, de maneira distinta do que ocorre nos jogos não-cooperativos convencionais, a mudança das estratégias dos agentes pode ser conduzida por comportamentos míopes (SANDHOLM, 2008; SANDHOLM, 2010). Neste contexto, o que guia os agentes não é necessariamente a racionalidade, mas o aprendizado através do sucesso e fracasso das estratégias.

O objetivo deste artigo é desenvolver uma versão evolucionária do jogo tragédia dos comuns incorporando um mecanismo de reprovação social para o uso não-sustentável dos recursos naturais. Neste jogo tanto a solução clássica da tragédia dos comuns quanto à gestão coletiva sustentável pode emergir da interação entre os agentes, o que implica num jogo com equilíbrios múltiplos.

Além desta introdução, compõe o texto uma introdução às dinâmicas evolucionárias, o desenvolvimento analítico do modelo e as conclusões.

1 Dinâmicas evolucionárias e dinâmicas de replicação

O uso de sistemas dinâmicos (contínuos) tem se mostrado uma ferramenta útil para solução de problemas envolvendo teoria dos jogos e, em especial, problemas com jogos evolucionários. Há várias maneiras de se tratar um jogo evolucionário em termos dinâmicos, sendo a mais famosa dentre elas a "dinâmica de replicação" introduzida pelo trabalho de Taylor e Jonker (1978).

> The replicator dynamic is a fundamental deterministic evolutionary dynamic for games. Under this dynamic, the percentage growth rate of the mass of agents using each strategy is proportional to the excess of the strategy's payoff over the population's average payoff. The replicator dynamic can be interpreted biologically as a model of natural selection, and economically as a model of imitation. (SANDHOLM, 2009, pp. 3)

Seguindo Gintis (2009), considere uma grande população de agentes que joga um jogo simétrico no qual, a cada momento do tempo, os agentes são pareados e jogam um *stage game*, sendo que o resultado do jogo determina a taxa de replicação dos agentes/estratégias. Como os agentes são pareados aleatoriamente é necessário definir qual a probabilidade de um agente (que usa certa estratégia) encontrar outro agente do mesmo tipo. A maneira mais simples de fazer isto é considerando que, numa população suficientemente grande, a probabilidade de um agente que joga a estratégia i encontrar outro agente do mesmo tipo é igual à fração p_i dos agentes jogadores de i na população.

Adicionalmente, considere um jogo evolucionário no qual cada jogador segue uma das n estratégias puras s_i para $i = 1, \dots\dots, n$. O jogo é repetido em $t = 1,2, \dots\dots. n$ Suponha também que p_i^t é a fração de jogadores que joga a estratégia s_i no tempo *t*, e que o *payoff* de jogar s_i é ${\pi_i}^t = \pi_i(p^t)$ onde $p^t = (p_1^t, \dots. p_n^t)$. A cada momento do tempo as estratégias geram seus respectivos *payoffs* tal que ${\pi_1}^t \leq {\pi_2}^t \leq \ \dots \leq \ {\pi_n}^t$.

Em cada intervalo de tempo dt cada agente conhece o *payoff* de outro agente aleatoriamente escolhido, com a probabilidade αdt. Caso este agente perceba que o *payoff* do outro agente (com quem foi pareado) é maior que o seu, ele muda de estratégia. Note que esse formato de jogo implica que a informação sobre os *payoffs* é imperfeita, sendo o processo de aprendizado (sobre os *payoffs*) dependente do pareamento dos agentes, que aprendem uns com os outros.

A probabilidade (no tempo *t*) de um agente usando a estratégia s_i mudar para estratégia s_j é dada pela seguinte função:

$$p_{ij}^t = \begin{cases} \beta\left(\pi_j^t - \pi_i^t\right) & para\, \pi_j^t > \pi_i^t \\ 0 & para\ \ \pi_j^t \leq \pi_i^t \end{cases} \qquad (1)$$

Com β sendo um parâmetro positivo suficientemente pequeno e $p_{ij}^t \leq 1$ para todo i e j. A fração esperada de agentes na população usando a estratégia s_i no tempo $t + dt$ é dada por:

$$\mathbf{E}p_i^{t+dt} = p_i^t - \alpha dt\, p_i^t \sum_{j=i+1}^{n} p_j^t\ \beta\left(\pi_j^t - \pi_i^t\right) + \sum_{j=1}^{i} \alpha dt\, p_j^t\, p_i^t\ \beta\left(\pi_i^t - \pi_j^t\right)$$

$$= p_i^t + \alpha dt\, p_i^t \sum_{j=1}^{n} p_j^t\ \beta\left(\pi_i^t - \pi_j^t\right) \qquad (2)$$

Computando o *payoff* médio da população como um todo, igual à $\bar{\pi} = \pi_1^t p_1^t + \pi_2^t p_2^t + \cdots + \pi_n^t p_n^t$, chega-se à:

$$\mathbf{E}p_i^{t+dt} = p_i^t + \alpha dt\, p_i^t \beta(\pi_i^t - \bar{\pi}) \qquad (3)$$

Considerando uma população suficientemente grande, pode-se fazer $p_i^{t+dt} = \mathbf{E}p_i^{t+dt}$. Tomando o limite de dt tendendo à zero, subtraindo p_i^t dos dois lados da equação (2.8) e dividindo por dt, se deduz a equação da dinâmica de replicação em tempo contínuo:

$$\dot{p}_i^t = \alpha p_i^t \beta(\pi_i^t - \bar{\pi}) \qquad (4)$$

A lógica da dinâmica de replicação é que a frequência de uma estratégia na população aumenta quando tem retorno acima da média. A participação de uma dada estratégia na população cresce à uma taxa proporcional à diferença do *payoff* desta estratégia com relação ao *payoff* médio de toda a população de agentes. A equação (4) é uma maneira generalizada de representar uma dinâmica de replicação quando existem “n” estratégias disponíveis e é encontrada na maior parte dos livros textos da área. Em uma situação especifica em que existam apenas 2 estratégias disponíveis dentro da população, algo frequente em modelos analíticos mais simples, há uma forma bastante conveniente de representar a dinâmica de replicação. Considere uma grande população de agentes jogando um jogo simétrico no qual existem duas estratégias p^t e $(1 - p^t)$ com os respectivos *payoffs* π_1^t e π_2^t. Reescrevendo (4) neste contexto:

$$\dot{p}^t = \alpha p^t \beta(\pi_1^t - \bar{\pi}) \qquad (5)$$

Existindo apenas dois *payoffs* disponíveis o *payoff* médio é facilmente deduzido como segue:

$$\bar{\pi} = p^t \pi_1^t + (1 - p^t)\pi_2^t \qquad (6)$$

Combinando (5) e (6):

$$\dot{p}^t = p^t(1 - p^t)\alpha\beta(\pi_1^t - \pi_2^t) \quad (7)$$

A equação (7) é análoga à (4), sendo assim, a taxa de participação de uma estratégia na população cresce se essa estratégia possuir rendimento maior que a média. Note, contudo, que é possível fazer uma interpretação mais particular da equação (7). Os agentes são pareados (a partir de uma distribuição de probabilidade uniforme) e em cada momento do tempo avaliam o rendimento esperado da sua estratégia. A variação do número de agentes jogando p^t ao longo do tempo depende da probabilidade de um agente que joga p^t encontrar outro que jogue $(1 - p^t)$ e da comparação que se fará dos *payoffs* π_1^t e π_2^t em cada instante/pareamento.

2 Conflito e cooperação em um contexto biológico

Como em Gintis (2009), considere uma situação em que dois tipos de aves disputam recursos. Imagine duas estratégias Falcão (*H*) e Pombo (*D*), sendo *H* uma estratégia agressiva e *D* passiva. Para fins ilustrativos, considere que o recurso natural envolvido na disputa são ninhos e que existem dois tipos de ninhos, os bons e os ruins. Quando uma ave encontra um ninho bom ela tem melhores condições de reprodução e, consequentemente, piores condições no ninho ruim. Cada ave se reproduz por clonagem, sendo que, encontrando um bom ninho produz uma média de $u + 2$ filhotes e quando encontra um ninho ruim produz apenas u filhotes. Existem *n* aves que procuram um ninho ao fim de cada dia, contudo, existem apenas *n/2* ninhos bons que são disputados pelas aves. O processo de reprodução ocorre de um dia para o outro, sendo que o dia é tratado como uma variável infinitesimal e o número de aves (*n*) como uma variável contínua.

Existe uma fração *p* de falcões (*H*) na população de aves e uma fração (1-*p*) de pombos (*D*), quando um pombo (*D*) encontra um outro pombo (*D*) eles dividem o ninho bom, produzindo cada um deles $u + 1$ filhotes. Quando um pombo (*D*) encontra um falcão (*H*), o pombo cede o ninho para o falcão, sendo assim o falcão produz $u + 2$ filhotes e o pombo, com o ninho ruim que lhe resta, apenas u filhotes. Finalmente, quando um falcão encontra um outro falcão eles brigam pelo ninho de modo que ambos produzem menos filhotes, produzindo apenas $u - 1$ filhotes cada um. Abaixo segue a matriz de *payoff* para um estágio desse jogo:

Matriz de payoffs (Dynamics-Hawk-Dove Game)

	H	**D**
H	$u - 1, u - 1$	$u + 2, u$
D	$u, u + 2$	$u + 1, u + 1$

O nascimento de pombos, a cada fração de tempo dt, pode ser descrito pela seguinte função:

$$f_d(p)dt = (u + 1 - p)dt \quad (8)$$

O evento de um pombo encontrar um falcão tem probabilidade "*p*", igual a frequência de falcões na população, o que diminui o número de nascimentos em uma unidade, em comparação ao que ocorreria caso o pombo encontrasse outro pombo. Como existem np falcões na população e $n(1-p)$ pombos, depois de um período dt o número de pombos na população será:

$$n(1-p)[1+(u+1-p)dt] = n(1-p)(1+f_d(p)dt) \quad (9)$$

Repetindo raciocínio análogo para os falcões, o número de nascimentos (por cada falcão) será:

$$f_h(p)dt = (u+2(1-p)-p)dt \quad (10)$$

O número de falcões após o intervalo dt é dado pela equação abaixo:

$$np[1+(u+2(1-p)-p)dt] = np(1+f_h(p)dt) \quad (11)$$

O número total de nascimentos, considerando os dois tipos/estratégias de aves é dado por:

$$f(p)dt = (1-p)f_d(p)dt + pf_h(p)dt \quad (12)$$

Sabe-se que, após os nascimentos, a população total de aves será igual à $n(1+f(p)dt)$, logo, a proporção dos falcões na população, após dt, será uma razão entre os nascimentos de falcões e o nascimento total de aves:

$$p(t+dt) = \frac{np(t)(1+f_h(p)dt)}{n(1+f(p)dt)} = p(t)\frac{(1+f_h(p)dt)}{(1+f(p)dt)} \quad (13)$$

Colocando em taxa de variação:

$$\frac{p(t+dt)-p(t)}{dt} = p(t)\frac{\left(f_h(p)-f(p)\right)}{(1+f(p)dt)} \quad (14)$$

É possível aproximar para tempo contínuo fazendo dt tender à zero:

$$\dot{p} = p(t)\left(f_h(p)-f(p)\right) \quad (15)$$

A equação acima é uma dinâmica de replicação, como derivada na seção anterior. Combinando (15) com (12) e (10):

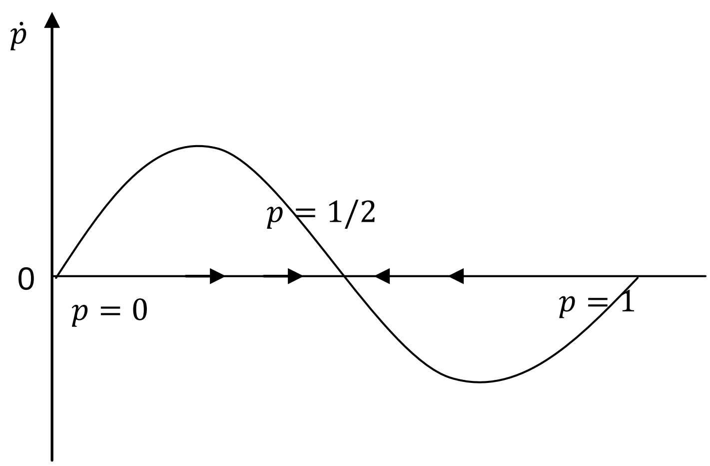
$$\dot{p} = p(1-p)(1-2p) \qquad (16)$$

A equação diferencial (16) tem três pontos fixos, $p = 0$, $p = 1$, $p = 1/2$. É possível analisar a estabilidade derivando (16) em relação à p e avaliando o sinal da derivada/variação no tempo.

$$\frac{\partial \dot{p}}{\partial p} = 1 - 6p + 6p^2$$

$$\frac{\partial \dot{p}}{\partial p}(0) > 0; \frac{\partial \dot{p}}{\partial p}\left(\frac{1}{2}\right) < 0; \frac{\partial \dot{p}}{\partial p}(1) > 0 \qquad (17)$$

Diagrama de fases (Dynamics-Hawk-Dove Game)



A população estará em estado estacionário se for composta exclusivamente de falcões $(p = 1)$ ou exclusivamente de pombos $(p = 0)$, contudo, tais situações não são estáveis, bastando a introdução de um única ave de tipo concorrente para a população ser puxada para uma situação de estabilidade com população heterogênea $\left(p = \frac{1}{2}\right)$, que é o único equilíbrio estável do jogo.

3 Tragédia dos comuns, dinâmicas evolucionárias e mecanismos de reprovação social

Embora a teoria econômica de "livro texto" deixe a impressão de que os agentes econômicos são hiper racionais e conseguem maximizar todo o tempo, ganha cada vez mais espaço na profissão uma ideia parcimoniosa sobre o tema.

> Economic theory is now routinely described as assuming not that people are relentless maximizers, but rather that some process of selection-perhaps the tendency of unprofitable firms to fail or the tendency of people to imitate their more successful counterparts-will cause us to observe people who act as if they are maximizing.(SAMUELSON, 2002, pp. 51)

Neste contexto, a teoria dos jogos evolucionários apresenta um grande potencial de aplicações em várias áreas da ciência econômica, sobretudo, quando se considera o trabalho de base já realizado por teóricos de jogos na construção dos fundamentos da área (FRIEDMAN 1998, PONTI 2000).

Duas ideias servem de ponto de partida para um modelo evolucionário: i) os agentes nem sempre se comportam de maneira plenamente racional e; ii) os comportamentos emergem de processos de aprendizagem e tentativa e erro (SAMUELSON, 1998). Um ponto a ser destacado é que, neste contexto, o comportamento ótimo não é uma característica intrínseca dos agentes e sim parte do conjunto de estratégias disponíveis.

Na conhecida tragédia dos comuns a solução de mercado leva à um equilíbrio sub-ótimo no qual o uso dos recursos naturais é realizado de maneira intertemporalmente ineficiente. Seguindo Ostrom (1990) e Bowles (2004), considere a seguinte versão simplificada do problema da tragédia dos comuns.

Imagine um lago onde dois pescadores podem pescar livremente usando duas estratégias disponíveis, uma que preserva os peixes de maneira intertemporal, também chamada de estratégia de cooperação. Na estratégia de cooperação cada pescador pesca *L/2* peixes. Por outro lado, na estratégia que chamaremos de estratégia não-sustentável, cada pescador pesca o máximo de peixes que conseguir pescar. Quando ambos os pescadores usam a estratégia de cooperação a utilidade auferida por ambos é igual à 1, quando um deles usa a estratégia não-sustentável, este pescador terá uma utilidade igual à $(1 + \alpha)$ com $\alpha > 0$ e a utilidade do outro pescador igual à 0. Quando os dois pescadores usam a estratégia não sustentável, cada um deles aufere uma utilidade igual à $0 < u < 1$.

Matriz de Payoffs (tragedy of the commons)

	Pescador A	
Pescador B	Estratégia de Cooperação	Estratégia Não-Sustentável
Estratégia de Cooperação	(1);(1)	(0);$(1 + \alpha)$
Estratégia Não-Sustentável	$(1 + \alpha)$; (0)	(u);(u)

Neste jogo o equilíbrio de Nash é Pareto Inferior com ambos os pescadores pescando o máximo possível.

Uma maneira alternativa de se pensar no mesmo problema é através de uma versão evolucionária deste jogo com a hipótese adicional da existência de um mecanismo de reprovação social para o comportamento não sustentável.

Suponha um jogo com *n* jogadores/pescadores, cada um dos agentes podendo pescar *L/n* peixes de maneira a preservar intertemporalmente os recursos (estratégia de cooperação). A estratégia alternativa é pescar o máximo possível de peixes. Normalizando $n = 1$ é possível escrever o jogo em termos do *share* de cada tipo de estratégia na população, com *k* agentes jogando a estratégia de cooperação e (1-*k*) agentes jogando a estratégia não-sustentável.

Considere o *payoff* associado à estratégia de cooperação igual à $U_c = k$ e o *payoff* associado à estratégia não-sustentável igual à $U_D = (1 + \alpha)k + u(1 - k),$ com $0 < u < 1$. Suponha que existe um mecanismo de reprovação social que impõe uma desutilidade à estratégia não-sustentável de modo que $\alpha = \alpha_a - \alpha_b k$ com $\alpha_a > 0$ e $\alpha_b > 0$. Esse mecanismo de reprovação social pode ser entendido como um arcabouço institucional que gera uma desutilidade subjetiva sobre os agentes não engajados na sustentabilidade dos recursos naturais, tão mais forte quanto maior for o número de agentes engajados na preservação e no uso intertemporalmente sustentável dos recursos naturais.

Note-se que duas forças atuam na parcela $(1 - k)$ de agentes, por um lado quanto maior for a fração *k* de jogadores mais vantajoso em termos de peixes pescados será para os (1-*k*) agentes, por outro lado quanto maior *k* mais forte o mecanismo de reprovação social. Dito de outro modo, na medida em que muitos agentes se preocupam com a sustentabilidade ambiental de longo prazo há uma grande janela para o comportamento oportunista por parte dos agentes não engajados no uso sustentável do recurso, neste caso do lago, havendo a oportunidade de se pescar os peixes que o outro grupo de agentes deixou de pescar. Isso, contudo, não acontece sem ônus, uma vez que a existência de um grande grupo de agentes comprometidos com a sustentabilidade do lago impõe uma reprovação aos agentes que se utilizam de maneira insustentável dos peixes do lago.

Escrevendo o problema em termos de uma dinâmica de replicação:

$$\dot{k} = k(1 - k)\beta[U_c - U_D] \qquad (18)$$

$$\dot{k} = k(1 - k)\beta[\alpha_b k^2 - \alpha_a k - u + ku] \qquad (19)$$

A equação (19) tem três soluções estacionárias (com sentido econômico, já que valores negativos para *k* não fazem sentido no modelo).

$$k^* = 1$$
$$1 > k^{**} > 0 \qquad (20)$$

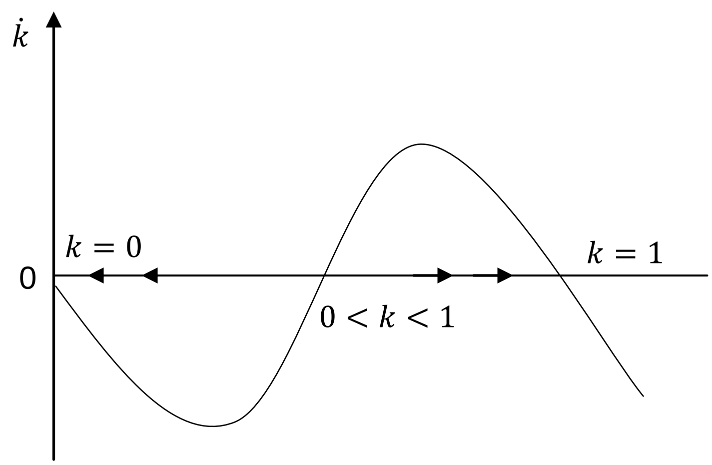
$$k^{***} = 0$$

Linearizando o modelo na vizinha dos equilíbrios, tem-se:

$$\frac{\partial \dot{k}}{\partial k}(0) = -\beta u\,; \qquad \frac{\partial \dot{k}}{\partial k}(k^{**}) > 0; \qquad \frac{\partial \dot{k}}{\partial k}(1) = \beta(\alpha_a - \alpha_b) \quad (21)$$

Com $\alpha_b > \alpha_a$, tanto k = 1 quanto k = 0 são soluções evolucionárias estáveis.

Diagrama de fases (Tragédia dos comuns evolucionária)



Alguns dos achados do modelo são: i) Possibilidade de múltiplos equilíbrios para o problema ambiental; ii) a possibilidade de emergência de comportamentos coletivos que levem ao uso sustentável dos recursos; iii) a existência de um efeito de escala, isto é, um nível mínimo de agentes jogando k abaixo do qual a economia tende para a solução Pareto Inferior.

Conclusão

Neste texto o problema da tragédia dos comuns foi tratado a partir de um jogo evolucionário dinâmico que incorpora um mecanismo de reprovação social.

Na sua versão convencional a tragédia dos comuns tem uma solução sub-ótima que enseja a necessidade de regulação estatal ou privatização dos recursos naturais de uso comum. Em particular a partir dos trabalhos de Ostrom (1990) soluções de gestão coletiva dos recursos naturais aparecem como possibilidades dadas certas condições institucionais.

Um dos aspectos desse ambiente institucional é a capacidade do grupo impor sobre os indivíduos sanções (diretas ou indiretas) que conduzam ao uso sustentável dos recursos. Não necessariamente esse mecanismo precisa ser refletido em sanções pecuniárias, uma vez que a reprovação por parte dos pares pode exercer grande impacto sobre o comportamento dos indivíduos.

No modelo desenvolvido no artigo encontra-se a possibilidade de equilíbrios múltiplos, sendo possível emergir tanto o comportamento sustentável como equilíbrio de longo prazo para o conjunto total dos agentes como a solução típica da tragédia dos comuns na qual todos os agentes se comportam de maneira não-sustentável.

Um ponto importante é a existência de um efeito de escala, que retroalimenta tanto o comportamento não-sustentável como o sustentável. Esse efeito de escala, sugere, dentre outras coisas, que a solução de gestão cooperativa só é possível em ambientes instituições nos quais existam um número minimamente razoável de agentes engajados com a sustentabilidade de longo prazo dos recursos do meio ambiente.

Referências

Friedman, D. (1991). “Evolutionary games in economics”, Econometrica, 59:637–666.

Friedman, D. (1998). “On economic applications of evolutionary game theory”, Journal of Evolutionary Economics, Springer, vol. 8(1), pp. 15-43.

Gintis H (2009) Game theory evolving, 2nd edn. Princeton University Press, Princeton

HARDIN, G. (1968) The Tragedy of Commons. Science, v. 162, p. 1243-1248.

Hofbauer, J. and K. Sigmund. (1998). “Evolutionary Games and Population Dynamics”. Cambridge: Cambridge University Press

Lerner, A.P. (1936), ‘The Symmetry Between Export and Import Taxes’, Economica, 3, pp. 306–13.

Maynard Smith, John and G. R. Price. 1973. "The Logic of Animal Conflict." Nature. 246, pp. 15-18.

Maynard Smith, John. 1982. “Evolution and the Theory of Games”. Cambridge: Cambridge University Press.

Nash, John F. 1950. "Equilibrium Points in n-Person Games." Proceedings of the National Academy of Sciences. 36, pp. 48-49.

Ostrom, Elinor. (1990). Governing the Commons: The Evolution of Institutions for Collective Active. New York: Cambridge University Press.

Samuelson, L. (2002) "Evolution and Game Theory" Journal of Economic Perspectives, 16(2): 47-66.

Sandholm, W. H. (2010). Population Games and Evolutionary Dynamics. MIT Press, Cambridge.

Taylor, P.D. and Jonker, L. “Evolutionarily stable strategies and game dynamics”.Mathematical Biosciences, 40:145–156, 1978

Vega-Redondo, Fernando. 1996. Evolution, Games, and Economic Behavior. Oxford: Oxford University Press.

Von Neumann, John e Oskar Morgenstern. 1944. Theory of Games and Economic Behavior. Princeton : Princeton University Press.

Weibull, J. W. (1995). Evolutionary Game Theory. Cambridge, MA., The MIT Press.